Stefan Schroth M.Sc.

Stabilitätsberechnungen, Dynamische und Kinematische Berechnung

Praktische Anwendungen der Eigenwertberechnung in MicroFe

In MicroFe stehen mehrere Module zur Lösung von Eigenwertproblemen in der Tragwerksplanung zur Verfügung. Für die Berechnungstypen Dynamische Berechnung (M510), Stabilitätsberechnung (M511), Numerische (M514) und Kinematische Berechnung (M515) wird damit eine effiziente und praxisnahe Arbeitsweise ermöglicht.

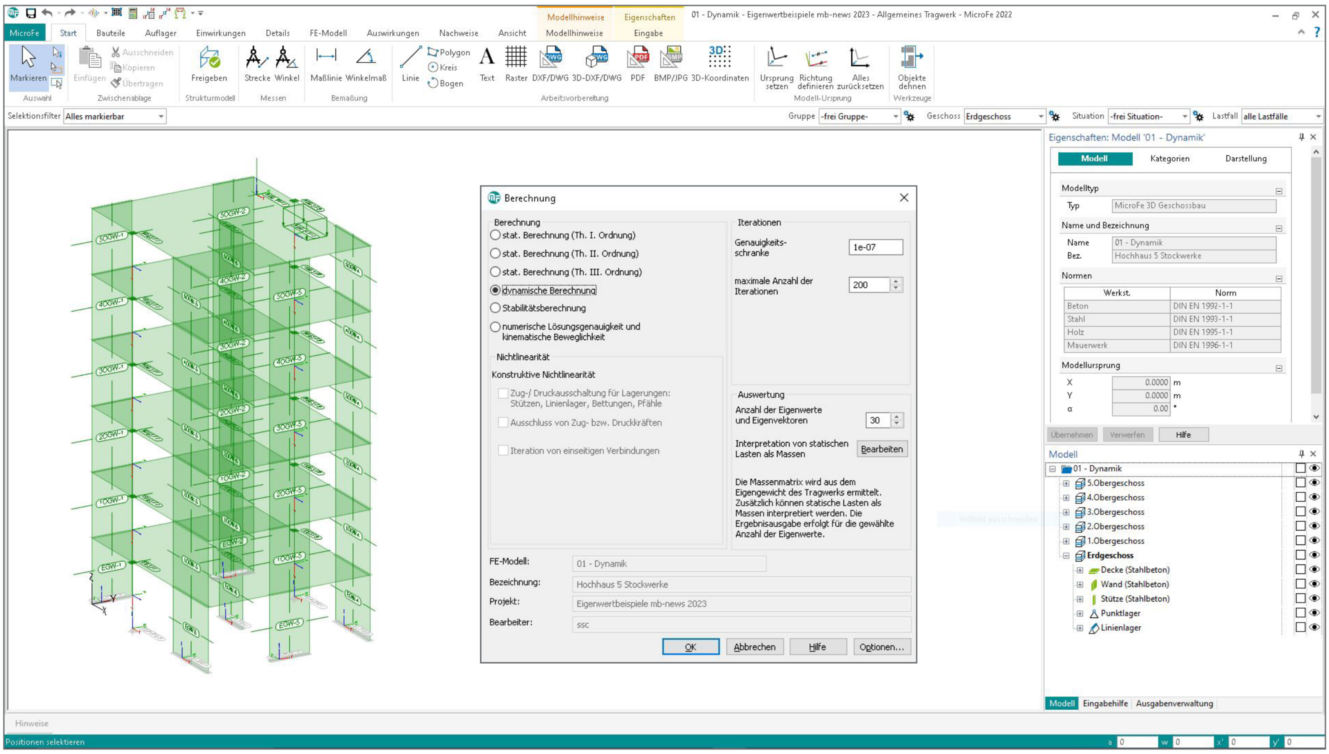

Bild 1. Vorbereitung einer Eigenwertberechnung in MicroFe

Das Eigenwertproblem

In der Tragwerksplanung stellt die Analyse der Eigenwerte und Eigenformen der Systemsteifigkeitsmatrix für verschiedene Probleme eine elegante Lösung dar. Bevor die konkreten Anwendungsfälle vorgestellt werden, ist es hilfreich, eine Übersicht über die allgemeine Formulierung des Eigenwertproblems zu schaffen.

Für jede $n \times n$ Matrix A gibt es n Vektoren $\vec{x}_\mathrm{i}$, die durch die Matrix ihre Richtung nicht ändern, sondern nur um den Faktor λ_i skaliert werden. Als Formel:

$$A\vec{x}_\mathrm{i} = \lambda_\mathrm{i}\vec{x}_\mathrm{i}$$

Die Ergebnisse werden dann als Eigenwert λ_i von A mit zugehörigem Eigenvektor/Eigenform $\vec{x}_\mathrm{i}$ bezeichnet.

Das Problem lässt sich mit einer $n \times n$ Matrix B verallgemeinern zu:

$$A\vec{x}_\mathrm{i} = \lambda_\mathrm{i} B\vec{x}_\mathrm{i}$$

Es gibt höchstens n verschiedene Eigenwerte λ_i mit zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_\mathrm{i}$.

Für die Bestimmung der Eigenwerte wird die Gleichung umgeformt:

$$A\vec{x} = \lambda B\vec{x} \Leftrightarrow (A - \lambda B)\vec{x} = 0 \Leftrightarrow det(A - \lambda B) = 0$$

Aus der Determinante entsteht ein Polynom n-ten Grades, das charakteristische Polynom $p_\mathrm{A}\ (\lambda)$. Jede Nullstelle λ_i von $p_\mathrm{A}\ (\lambda)$ entspricht einem Eigenwert von A. Der zugehörige Eigenvektor $\vec{x}_\mathrm{i}$ wird dann als Lösung des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_\mathrm{i} B)\vec{x}_\mathrm{i} = 0$ bestimmt.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms werden in MicroFe mithilfe iterativer numerischer Verfahren sehr schnell berechnet und mit automatischen Kontrollverfahren (Orthogonalität, Sturmscher Test) überprüft. Für weitere Informationen verweisen wir auf allgemeine Literatur (z.B. [1]) und das mbinar zum Thema [2].

Übersicht der Anwendungsaufgaben

Das Eigenwertproblem kann für mehrere Aufgaben in der Tragwerksplanung herangezogen werden. Für die Anwendung ist es wichtig zu verstehen, wie die Aufgaben als Eigenwertproblem gelöst werden und welche Größen untersucht werden. Die wichtigsten Aufgaben sind [3]:

- **Dynamische Berechnung** (Berechnung von Eigenschwingungen)
- **Stabilitätsberechnung** (Bestimmung der Systemstabilität)
- **Numerische Berechnung** (Maß für den Verlust numerischer Lösungsgenauigkeit)
- **Kinematische Berechnung** (Beweglichkeiten im System)

In allen Aufgaben wird für A die quadratische $n \times n$ Systemsteifigkeitsmatrix K eingesetzt. Dabei entspricht n der Anzahl der Freiheitsgrade im FE-System. Für die Anwendungsaufgaben in der Tragwerksplanung sind nur eine kleine Zahl der ersten (kleinsten) Eigenwerte interessant.

Die Wahl der Matrix B hängt von der mechanischen Interpretation ab. Tabelle 1 zeigt die in MicroFe implementierten Anwendungsfälle mit der jeweiligen Wahl für A und B und den Ergebnissen (Eigenwerte und Eigenformen).

In den folgenden Abschnitten werden die Hintergründe der Anwendungsfälle vorgestellt und anhand von praktischen Beispielen in MicroFe interpretiert. Die Berechnungsparameter (Genauigkeitsschranke, maximale Anzahl Iterationen, Anzahl Eigenwerte, Anzahl Lastinkremente) sind abhängig von der betrachteten Aufgabe. In [2] wird darauf näher eingegangen, ebenso wie auf die erweiterten Berechnungsoptionen. Alle Aufgabentypen können unter Beachtung der Hinweise im Berechnungsdialog mit konstruktiver Nichtlinearität berechnet werden.

Dynamische Berechnung

In der statischen Berechnung wird von unbewegten Systemen mit zeitunabhängigen Deformationen $\vec{u}$ ausgegangen. Masseträgheit bei schnellen Zustandsveränderungen, wie sie beispielsweise bei Erdbebenberechnungen vorkommen, führt zu zeitabhängigen Deformationen $\vec{u}(t)$ und damit zur dynamischen Berechnung. Eine gute Einführung mit physikalischen Hintergründen kann in [1] nachgelesen werden.

Mithilfe des Eigenwertproblems kann die dynamische Berechnung mit der FEM effizient durchgeführt werden. Zusätzlich zur Steifigkeitsmatrix wird für jedes Element und jeden Lastfall eine Massematrix M bestimmt, welche der FE-Formulierung der dynamischen Eigenschaften des Systems entspricht.

Allgemein	$(A - \lambda_\mathrm{i} B)\vec{x}_\mathrm{i} = 0$	λ_i Eigenwerte	$\vec{x}_\mathrm{i}$ Eigenformen
Dynamische Berechnung	$\left(K - \omega_\mathrm{i}^2 M\right)\vec{x}_\mathrm{i} = 0$ K Steifigkeitsmatrix M Massematrix	Quadrate der Eigenkreisfrequenzen	Eigenschwingformen
Stabilitätsberechnung	$\left(K - \lambda_\mathrm{i} K_\mathrm{g}\right)\vec{x}_\mathrm{i} = 0$ K Steifigkeitsmatrix K_g Geometrische Steifigkeitsmatrix	Systemknicksicherheiten	Knickformen
Numerische Lösungsgenauigkeit	$(K - \lambda_1 I)\vec{x}_1 = 0$ K Steifigkeitsmatrix I Einheitsmatrix	Kleinster Eigenwert der Systemsteifigkeitsmatrix	Steifigkeitsverteilung der Systemsteifigkeitsmatrix
Kinematische Beweglichkeit	$((K + \lambda_0 I) - \lambda_\mathrm{i}^* I)\vec{x}_\mathrm{i} = 0$ K Steifigkeitsmatrix I Einheitsmatrix	$\lambda_\mathrm{i} = \lambda_\mathrm{i}^* - \lambda_0$ Nulleigenwerte der Systemsteifigkeitsmatrix	Starrkörperbewegungen des Systems

Tabelle 1. Eigenwertaufgaben und betrachtete Größen (nach [3])

Mit $A = K$ (Systemsteifigkeitsmatrix), $B = M$ (Systemmassematrix), $\lambda_\mathrm{i} = \omega_\mathrm{i}^2$ (Quadrat der Eigenkreisfrequenzen) und $\vec{x}_\mathrm{i}$ (Eigenschwingformen) ergibt sich für das Eigenwertproblem der dynamischen Berechnung die Gleichung:

$$(K - \omega_\mathrm{i}^2 M)\vec{x}_\mathrm{i} = 0$$

Die Eigenfrequenzen und -schwingformen geben eine grundlegende Aussage über das dynamische Verhalten des Systems und bilden die Voraussetzung für die Schwingungsanalyse des Modells.

Anwendungsbeispiel

Das in Bild 1 gezeigte Modell hat sechs Stockwerke, die jeweils die gleichen Wände, Decken und Stützen beinhalten. Die dynamische Berechnung wird im MicroFe-Modul M510 „Grundfrequenz, Grundschwingformen" durchgeführt. Bild 2 zeigt die Animation der ersten Eigenschwingform in verdeckter Systemdarstellung. Oben rechts werden die Eigenfrequenzen ausgegeben. Die erste Eigenfrequenz liegt mit 1.74 Hz zwischen den im Hochbau üblichen 1 und 2 Hz.

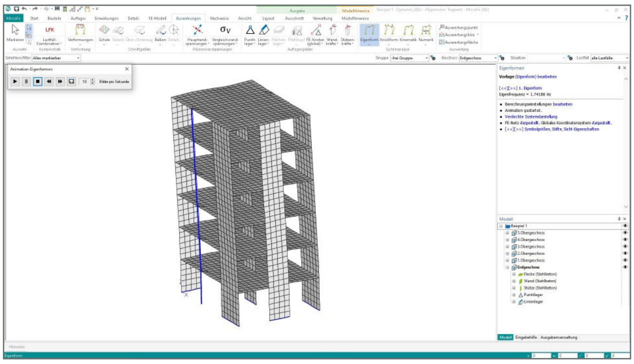

Bild 2. Animation der Eigenschwingform mit M510

Die erste Eigenform zeigt eine Schwingung in x-Richtung, während die zweite Eigenform eine Schwingung in y-Richtung und die dritte Eigenform eine Verdrehung um die z-Achse zeigt. Die Ergebnisse der dynamischen Berechnung erlauben somit die Analyse des grundlegenden Schwingungsverhaltens des Modells.

Eine sehr wichtige Anwendung stellt die Erdbebenanalyse mittels Antwortspektrenverfahren dar. Die Artikel [4] und [5] geben dazu einen sehr guten Einblick.

Stabilitätsberechnung

In der linearen statischen Berechnung wird angenommen, dass die Verformungen vernachlässigbar sind und die Querschnitte der betrachteten Bauteile eben sind. Bei Systemen mit größerer Verformung ist dies nicht mehr erfüllt. Die statische Berechnung ist geometrisch nichtlinear durchzuführen, und Imperfektionen wie Knicken und Beulen sind zu berücksichtigen. Mithilfe des Eigenwertproblems kann schnell festgestellt werden, ob ein weiterer Stabilitätsnachweis notwendig ist.

In der FEM wird dies durch die geometrische Steifigkeitsmatrix K_g umgesetzt, die mittels geometrisch nichtlinearer Theorie aus den Schnittgrößen der linearen Berechnung bestimmt wird. Das Eigenwertproblem wird mit $A = K$ und $B = K_\mathrm{g}$ formuliert als:

$$(K - \lambda_\mathrm{i} K_\mathrm{g})\vec{x}_\mathrm{i} = 0$$

Dabei werden mit λ_i die Systemknicksicherheiten und mit $\vec{x}_\mathrm{i}$ die Knickformen bestimmt. Die Knicksicherheit λ_i, auch Verzweigungslastfaktor genannt, gibt an, wie oft die aktuelle Last auf das System aufgebracht werden kann, bevor es versagt. Für den Stabilitätsnachweis gilt dann:

$\lambda_\mathrm{i} < 1$	instabiler Zustand
$\lambda_\mathrm{i} < 1$	indifferent
$1 < \lambda_\mathrm{i} < 10$	stabiles Gleichgewicht, Nachweise nach Spannungstheorie II. Ordnung erforderlich
$\lambda_\mathrm{i} > 10$	stabiles Gleichgewicht, Nachweise nach Spannungstheorie II. Ordnung nicht erforderlich

Die Knickform zeigt die Steifigkeitsverteilung des Systems an. Die Stabilitätsberechnung eignet sich gut zur Kontrolle vor einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung.

Anwendungsbeispiel

Das verwendete Modell ist eine Weiterbearbeitung des Modells „Bürogebäude Europaallee" aus den Beispielmodellen zur mb WorkSuite 2021, bei dem die Wand im untersten Geschoss durch eine Mauerwerkswand ersetzt wurde. Wird bei der Aussteifungsberechnung mit M130 der Labilitätsnachweis durchgeführt, bricht die Berechnung ab, mit dem Hinweis, dass die Berechnung nach Spannungstheorie II. Ordnung nicht durchgeführt werden konnte. Die Ursache kann mit einer Stabilitätsberechnung schnell gefunden werden.

Die Berechnung mit M511 „Stabilitätsuntersuchung" ergibt für die erste Knicksicherheit den Wert 0.53. Dies zeigt bereits, dass das System instabil ist. Anhand der ersten Knickform ist auch zu sehen, dass die Ursache im Versagen der Mauerwerkswand liegt (Bild 3). Die Stabilitätsberechnung stellt damit ein zuverlässiges Werkzeug dar, um Stellen mit niedriger Knicksicherheit zu finden.

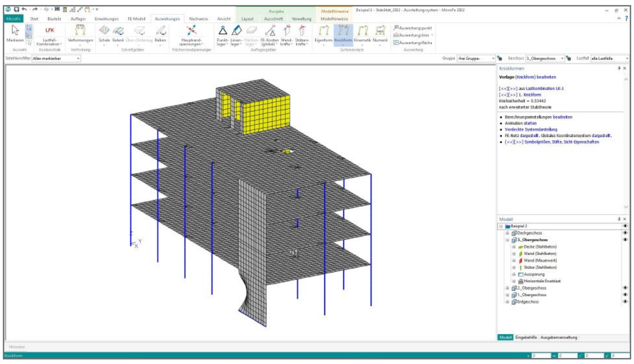

Bild 3. Erste Knickform des betrachteten Modells

Numerische Berechnung

Die numerische Berechnung stellt eine Möglichkeit dar, mithilfe der Eigenwerte der Systemsteifigkeitsmatrix das Ausmaß des numerischen Fehlers zu bestimmen. Der in der Programmierung immer auftretende Gleitkommafehler kann bei Modellen mit großen Steifigkeitsdifferenzen zum Verlust von Nachkommastellen und damit zu fehlerhaften Ergebnissen führen.

Mit der Systemsteifigkeitsmatrix K und der Einheitsmatrix I wird das Eigenwertproblem mit $A = K$ und $B = I$ zu

$$(K - \lambda_\mathrm{i} I)\vec{x}_\mathrm{i} = 0$$

Die Eigenformen $\vec{x}_\mathrm{i}$ repräsentieren die Steifigkeitsverteilung von K zum Eigenwert λ_i und helfen dabei, die Steifigkeitsverteilung des Systems zu verstehen und mögliche Fehlerquellen zu finden. Die Eigenwerte λ_i werden sortiert, sodass λ_1 der kleinste und λ_n der größte Eigenwert von K ist. Sie geben eine Aussage darüber, wie stark Rundungsfehler das Ergebnis beeinflussen. Ist der kleinste Eigenwert sehr klein, ist das System sehr weich und fast beweglich (K ist fast singulär). Je größer der Unterschied zwischen kleinstem und größtem Eigenwert ist, desto größer ist auch der Gleitkommafehler.

Der kleinste Eigenwert wird schnell berechnet, für den größten Eigenwert wird über die Unendlichnorm eine Schranke bestimmt. Dann wird über die Konditionszahl und die Genauigkeit des intern verwendeten Datentyps bestimmt, wie groß die Stellengenauigkeit im System ist. Es gilt die Regel, dass die numerische Stellengenauigkeit des Systems immer mehr als vier sein sollte.

Anwendungsbeispiel

Das verwendete Modell zeigt ein zehnstöckiges Bauwerk, bei dem im fünften Stockwerk eine Wand mit stark verringerter Steifigkeit vorliegt. Dies geschieht schnell, z.B. durch eine Fehleingabe in der Wanddicke. Die Ergebnisse der Verformungen und Schnittgrößen zeigen auf den ersten Blick keine Auffälligkeiten. Die numerische Berechnung zeigt allerdings, dass potenzielle Fehler durch große Steifigkeitsunterschiede wahrscheinlich sind.

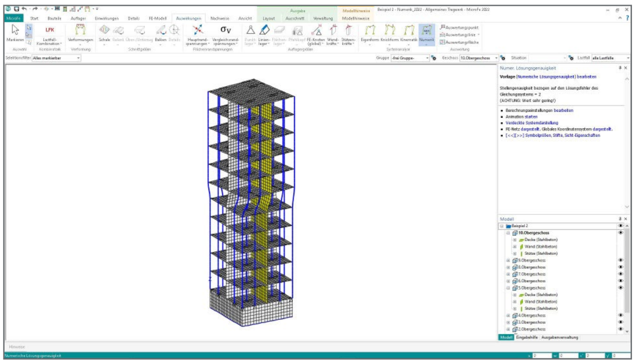

Bild 4. Ergebnis der numerischen Berechnung

Die numerische Berechnung wird mit M514 „Numerik-Test“ durchgeführt. Das Ergebnis (Bild 4) zeigt eine Stellengenauigkeit von 2, was auf einen numerischen Fehler durch große Steifigkeitsunterschiede hinweist. Die dargestellte erste Eigenform gibt bereits einen Hinweis darauf, wo die Ursache zu finden ist.

Kinematische Berechnung

Mit zunehmender Größe eines FE-Modells sind die Ursachen von Beweglichkeiten durch vergessene oder falsch modellierte Lagerungen oder Gelenke immer schwerer zu finden. Die kinematische Berechnung ist eine sehr nützliche Methode zur Kontrolle der Eingabe.

Die Grundidee ist, über das Eigenwertproblem die Eigenformen zu Nulleigenwerten zu bestimmen und damit die möglichen Starrkörperbewegungen sichtbar zu machen. Dies wird über die sogenannte Spektralverschiebung der Eigenwerte erreicht. Dabei werden die Eigenwerte λ_i um eine Konstante λ_0 verschoben zu neuen Eigenwerten:

$$\lambda_\mathrm{i}^* = \lambda_\mathrm{i} + \lambda_0$$

Dann wird die Steifigkeitsmatrix ebenfalls auf die neue Steifigkeitsmatrix K^* verschoben:

$$K^* = K + \lambda_0 I$$

Damit kann das Eigenwertproblem mit Spektralverschiebung betrachtet werden:

$$((K + \lambda_0 I) - \lambda_\mathrm{i}^* I)\vec{x}_\mathrm{i} = 0$$

Wenn λ_0 so gewählt ist, dass K^* invertierbar ist, hat K^* die gleichen Eigenvektoren wie K, und alle zugehörigen Eigenwerte sind ungleich null. Im Ergebnis erhält man die spektralverschobenen Nulleigenwerte (Spektralwerte) λ_i^*. Die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_\mathrm{i}$ stellen die Form der Starrkörperbewegungen (Spektralformen) im System dar. Mit der entsprechenden grafischen Darstellung in MicroFe kann so die Stelle leicht gefunden werden, an der eine Beweglichkeit/Starrkörperverschiebung vorliegt.

Anwendungsbeispiel

Das verwendete Modell ist eine Weiterbearbeitung des Modells „Bürogebäude Europaallee“ aus den Beispielmodellen zur mb WorkSuite 2021. Eine Gelenkdefinition am Kopf einer Wand im untersten Geschoss führt zu einem beweglichen und nicht berechenbaren Modell. Mit der kinematischen Berechnung kann die Stelle durch eine grafische Darstellung des betroffenen Bauteils oder Bereichs gefunden werden.

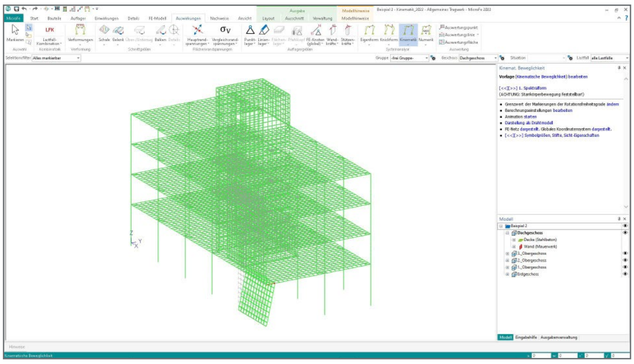

Bild 5. Grafische Darstellung der Beweglichkeit

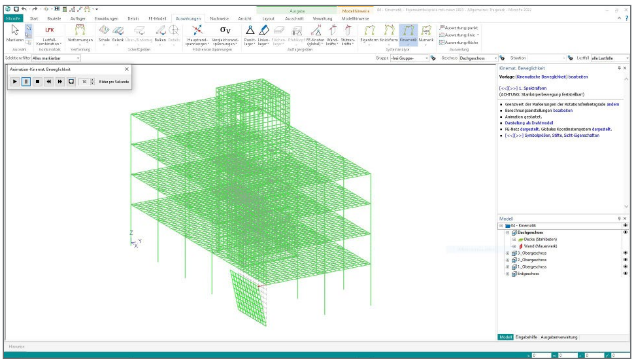

Bild 6. Animation der Beweglichkeit

Die kinematische Berechnung mit M515 „Kinematik-Test“ zeigt im Ergebnis oben rechts, dass eine Starrkörperverschiebung gefunden wurde. Es wird auch die erste Eigenform angezeigt (Bild 5), welche die Steifigkeitsverteilung und damit die Starrkörperbewegungen darstellt. Das Abspielen der Animation (Bild 6) zeigt die Form der Beweglichkeit und ist somit sehr hilfreich, um die Ursache zu finden.

Fazit

Für die vorgestellten Probleme in der Tragwerksplanung stellt die Eigenwertformulierung eine elegante Lösung dar. MicroFe bietet eine einfache Durchführung und eine ansprechende grafische Auswertung der beschriebenen Eigenwertaufgaben. Die Berechnung der Eigenwerte ist schnell und einfach zu bedienen. Dies führt zu einer deutlichen Steigerung der Produktivität im Arbeitsalltag.

Stefan Schroth M.Sc.
mb AEC Software GmbH
mb-news@mbaec.de

Literatur

[1] H. Werkle: Finite Elemente in der Baustatik. Friedrich Vieweg & Sohn Verlag 2008.

[2] mbinar - C|SD - Grundlagen der FEM: Stabilitäts-, Dynamische und Kinematische Berechnungen. https://youtu.be/CUgrEkZZZ5Q

[3] C. Barth: Neuer Eigenwertlöser für MicroFe, EuroSta, proFEt - eine Erweiterung des Leistungsspektrums. mb-news Nr. 3/1998.

[4] M. Öhlenschläger: Erdbebenanalyse mit MicroFe. mb-news Nr.7/2018.

[5] S. Schroth: Neue Optionen in der Erdbebenanalyse. mb-news Nr. 3/2021.

Preise und Angebote

MicroFe comfort 2022
MicroFe-Paket „Platten-, Scheiben- und Faltwerksysteme“
M100.de, M110.de, M120.de und M161

PlaTo 2022
MicroFe-Paket „Platten“
M100.de

M510 Grundfrequenz, Grundschwingformen
Weitere Informationen unter
https://www.mbaec.de/modul/M510

M511 Stabilitätsuntersuchung
Weitere Informationen unter
https://www.mbaec.de/modul/M511

M514 Numerik-Test
Weitere Informationen unter
https://www.mbaec.de/modul/M514

M515 Kinematik-Test
Weitere Informationen unter
https://www.mbaec.de/modul/M515

Es gelten unsere Allgemeinen Geschäftsbedingungen. Änderungen und Irrtümer vorbehalten. Alle Preise zzgl. Versandkosten und MwSt. – Hardlock für Einzelplatzlizenz je Arbeitsplatz erforderlich (95,- EUR). Folgelizenz-/Netzwerkbedingungen auf Anfrage. – Stand: Mai 2022

Unterstütztes Betriebssystem: Windows 10 (64)

Preisliste: www.mbaec.de